TD 32 : Intégration – Corrigé partiel

Exercice 15 Vu en TD : $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

Montrons que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. On repart de la définition. Montrons que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}_+ \qquad |x-y| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur $[0,1]$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\forall x', y' \in [0,1] \qquad |x'-y'| \leq \delta_1 \implies \left|f(x')-f(y')\right| \leq \varepsilon \tag{$\star$}$$

et de même, comme f est uniformément continue sur $[1,+\infty[$, il existe $\delta_2 > 0$ tel que

$$\forall x', y' \in [1,+\infty[\qquad |x'-y'| \leq \delta_2 \implies \left|f(x')-f(y')\right| \leq \varepsilon \tag{$\star\star$}$$

On pose à présent $\delta =$ .... (on verra ensuite quoi mettre) Soit $x,y \in \mathbb{R}_+$ tels que $|x-y| \leq \delta$. Montrons que $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

- Si $x,y \in [0,1]$, alors il suffit d'avoir $\delta \leq \delta_1$ pour, en utilisant $(\star)$, en déduire qu'on a bien $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

- Si $x,y \in [1,+\infty[$, alors il suffit d'avoir $\delta \leq \delta_2$ pour, en utilisant $(\star\star)$, en déduire qu'on a bien $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

- Si $x \in [0,1]$ et $y \in [1,+\infty[$, alors,
  - comme $|x-y| = y-x \leq \delta$, on a aussi $|x-1| = 1-x \leq \delta \leq \delta_1$, ce qui permet d'en déduire par $(\star)$ avec $y' = 1$ et $x' = x$ que $|f(x)-f(1)| \leq \varepsilon$.
  - comme $|x-y| = y-x \leq \delta$, on a aussi $|1-y| = y-1 \leq \delta \leq \delta_2$, ce qui permet d'en déduire par $(\star\star)$ avec $x' = 1$ et $y' = y$ que $|f(1)-f(y)| \leq \varepsilon$.

  Ainsi, si $\delta \leq \delta_1$ et $\delta \leq \delta_2$, on a

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &\leq |f(x)-f(1)+f(1)-f(y)| \\
&\leq |f(x)-f(1)| + |f(1)-f(y)| \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon
\end{aligned}$$

- Si $x \in [1,+\infty[$ et $y \in [0,1]$, on montre de même en échangeant les rôles de x et de y que $|f(x)-f(y)| \leq 2\varepsilon$.

Ainsi, en posant $\delta = \min(\delta_1,\delta_2) > 0$, on a bien $\delta \leq \delta_1$ et $\delta \leq \delta_2$, si bien que dans tous les cas, on a $|f(x)-f(y)| \leq 2\varepsilon$. Finalement :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}_+ \qquad |x-y| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq 2\varepsilon$$

ce qui équivaut à l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$ (qu'on ait 2ε ou ε ne change rien, c'est une assertion équivalente).